PART4 $x\to\pm\infty$のときの極限，指数・対数関数の極限

要点整理と公式

要点 ① $x\to\pm\infty$のときの関数の極限

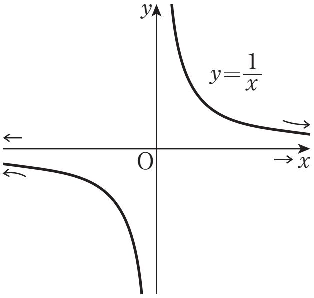
変数 x が限りなく大きくなることを $x\to\infty$ と表す。また，変数 x が負でその絶対値が限りなく大きくなることを $x\to-\infty$ と表す。

$x\to\infty$ のとき，$f(x)$ の値が限りなく α に近づくならば，

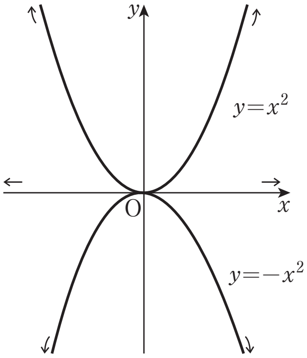
$\lim_{x\to} f(x)=\alpha$ と表す。

$x\to-\infty$ のとき，$f(x)$ の値が限りなく α に近づくならば，

$\lim_{x\to}\ f(x)=\alpha$ と表す。



(ex) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=$ ，$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=$



$x\to\infty$ のとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば，

$\lim_{x\to} f(x)=\infty$ と表し，$f(x)$ の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば，$\lim_{x\to} f(x)=-\infty$ と表す。

$x\to-\infty$ のときも同様に表す。

(ex) $\lim_{x\to\infty}x^2=$ 　　$\lim_{x\to-\infty}x^2=$

$\lim_{x\to\infty}(-x^2)=$ ，$\lim_{x\to-\infty}(-x^2)=$

また，右の＜極限値の性質＞については，$x\to a$ を $x\to\infty$，$x\to-\infty$ におき換えても成り立つ。

(ex) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-5}{3x^2-2x+4}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\qquad}{\qquad}=$

「　　　　」の極限については，数列の極限と同様，適切な式変形により極限が求められる形にする。

＜極限値の性質＞

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ のとき

$\lim_{x\to a}kf(x)=k\alpha$ 　（k は定数）

$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$

$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ 　（$\beta\neq0$）

要点② 指数関数・対数関数の極限

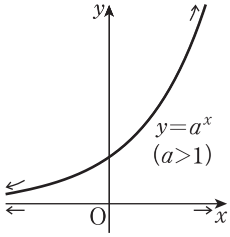
指数関数 $y=a^x$ の極限については，次のことがいえる。

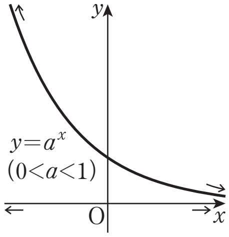
$a>1$ のとき

$\lim_{x\to\infty} a^x=\quad$ ，$\lim_{x\to-\infty} a^x=$

$0<a<1$ のとき

$\lim_{x\to\infty} a^x=\quad$ ，$\lim_{x\to-\infty} a^x=$





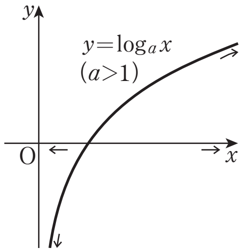
対数関数 $y=\log_a x$ の極限については，次のことがいえる。

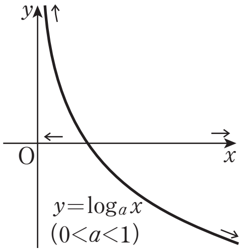
$a>1$ のとき

$\lim_{x\to\infty} \log_a x=\quad$ ，$\lim_{x\to} \log_a x=$

$0<a<1$ のとき

$\lim_{x\to\infty} \log_a x=\quad$ ，$\lim_{x\to} \log_a x=$





4 (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x^2}\right)$　　(ii) $\lim_{x\to\infty}(x-x^3)$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+2x}$　　(ii) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+3}$

(iii) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$　　(iv) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x)$

(3) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$　　(ii) $\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}$

Point Pickup

$x\to\pm\infty$の極限

関数の極限を求める際に，形式的に $0\times\infty$，$\infty-\infty$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\frac{0}{0}$ の形となる極限，いわゆる不定形の極限については，数列の極限同様，くくり出し，分母の最高次数の項で分母・分子を割る，有理化などによって，極限が求められる形に変形する。

指数・対数関数の極限

底>1，または$0<$底<1のいずれであるかに注目し，指数関数，対数関数のグラフをイメージする。

第 5 講 PART4 確認問題

次の極限を求めよ。答えは下の①～⑥のうちから選べ。

1 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ ［ア］

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1

④ -1　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

2 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3x-2x^2)$ ［イ］

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1

④ -1　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

3 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+3x}$ ［ウ］

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1

④ -1　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

4 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2+1}$ ［エ］

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1

④ -1　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

5 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)$ ［オ］

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1

④ -1　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

6 $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$ カ

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ -1 ⑤ ∞ ⑥ $-\infty$

7 $\lim_{x \to \infty} \frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}$ キ

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ -1 ⑤ ∞ ⑥ $-\infty$

8 $\lim_{x \to +0} \log_3 \frac{1}{x}$ ク

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ -1 ⑤ ∞ ⑥ $-\infty$

[MEMO]

PART4 $x\to\pm\infty$のときの極限，指数・対数関数の極限

4 (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x^2}\right)$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-x^3)$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+2x}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+3}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$　　(iv) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x)$

(3) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}$

[解答]

(1)(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x^2}\right)=3$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-x^3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=-\infty$

(2)(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=0$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+\frac{3}{x^2}}=-\infty$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x+1}+x)(\sqrt{x^2+3x+1}-x)}{\sqrt{x^2+3x+1}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+3x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=-\frac{3}{2}$$

（別解）　$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}+x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-3t+1}-t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-3t+1}-t\right)\left(\sqrt{t^2-3t+1}+t\right)}{\sqrt{t^2-3t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-3t+1)-t^2}{\sqrt{t^2-3t+1}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t+1}{\sqrt{t^2-3t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=-\frac{3}{2}$$

(3)(i)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=-1$

(ii)　$x\to+0$ のとき $\dfrac{1}{x}\to\infty$　　　よって $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}=\infty$

（別解）　$\log_2\dfrac{1}{x}=\log_2 x^{-1}$

$=-\log_2 x$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-\log_2 x)=\infty$

第 5 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ であるから，[A]

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\mathbf{1}$$

[A]　$x\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{x^2}$ は限りなく 0 に近づく。

2

[正解] イ：⑥

[解説]

$$\lim_{x\to\infty}(3x-2x^2)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{3}{x}-2\right)$$ [B]

$$=-\boldsymbol{\infty}$$

[B]　最高次の項 x^2 でくくる。

3

[正解] ウ：①

[解説]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}}$$ [C]

$$=\mathbf{0}$$

[C]　分母・分子を分母の最高次の項 x^2 で割る。

4

[正解] エ：⑥

[解説]

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2+\dfrac{1}{x^2}}$$ [D]

$$=-\boldsymbol{\infty}$$

[D]　分母・分子を x^2 で割る。

5

[正解] オ：④

[解説]

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}$$ [E]

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-2x+3)-x^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1}$$ [F]

$$=\frac{-2}{1+1}=\mathbf{-1}$$

[E]　$\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{1}$ の分母・分子に $\sqrt{x^2-2x+3}+x$ をかけ，分子を有理化する。

[F]　分母・分子を x で割る。

6 [正解] カ：④

[解説]

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$ [G]

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$$ [H]

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}$$

[G] $\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x}{1}$ の分母・分子に $\sqrt{x^2+2x}-x$ をかけ，分子を有理化する。

[H] $x\to-\infty$ であるので，ここでは $x<0$ と考える。このとき，$\sqrt{x^2}=-x$ であることに注意。

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)=-1-1=-2$ であるから，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=\frac{2}{-2}=\mathbf{-1}$$

（別解）

$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-2t}-t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-2t}-t\right)\left(\sqrt{t^2-2t}+t\right)}{\sqrt{t^2-2t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-2t)-t^2}{\sqrt{t^2-2t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-2t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{t}}+1}$$ [I]

$$=\frac{-2}{1+1}=\mathbf{-1}$$

[I] 分母・分子を t で割る。このとき $t>0$ だから，$t=\sqrt{t^2}$ である。

7　[正解] キ：③

[解説]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3^x}{5^x}}{1+\frac{3^x}{5^x}} \quad \text{[J]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^x}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^x}$$

[J]　分母・分子を 5^x で割る。

$\lim_{x\to\infty}\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right\}=1$,　$\lim_{x\to\infty}\left\{1+\left(\frac{3}{5}\right)^x\right\}=1$ であるから,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}=\frac{1}{1}=\mathbf{1}$$

8　[正解] ク：⑤

[解説]

$x \to +0$ のとき，$\frac{1}{x} \to \infty$ [K]

[K]　$x \to +0$ のときの真数 $\frac{1}{x}$ の極限を調べる。

よって，$\lim_{x\to+0}\log_3\frac{1}{x}=\infty$

(別解)

$\log_3\frac{1}{x}=\log_3 x^{-1}=-\log_3 x$ であるから,

$$\lim_{x\to+0}\log_3\frac{1}{x}=\lim_{x\to+0}(-\log_3 x) \quad \text{[L]}$$

$$=\infty$$

[L]　$x \to +0$ のとき，$\log_3 x \to -\infty$